***Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”***
***Факултет по математика и информатика***
***Катедра “Приложна математика и моделиране”***

# ***“Компютърни числени методи”***
# ***ЛЕКЦИЯ 8***

***Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева***, snow@uni-plovdiv.bg

Он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

Литература:

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

*Съдържание*

***Числено интегриране и оценка на грешката***

## 1. Постановка на задачата за числено интегриране

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$. Търси се стойността на определения интеграл $\boxed{I=\int_a^b f(x)dx}$.

Определените интеграли служат за намиране на лица и обеми.

Числените методи за интегриране се налага да се използват:

- Когато не съществува примитивна функция (интегралът не се изразява с елементарни функции), напр. $\int_1^2 \frac{1}{\ln(x)}dx$, $\int_1^2 \frac{\sin(x)}{x}dx$ и др.
- когато примитивната е много сложен израз
- когато $f(x)$ може да е известна само от таблици.

<u>Идея на численото интегриране.</u> Функцията $f(x)$ да се приближи с подходяща функция $\varphi(x)$, която по-лесно може да се интегрира. Най-често $\varphi(x)$ е интерполационен полином.

Общ случай. Нека е известна таблица от стойности на $y_i$ на функцията $f(x)$ в точките (възлите) $a \le x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$: (1)

| $x_i$ | $x_0$ | $x_1$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $y_0$ | $y_1$ | ... | $y_n$ |

И нека приближаващата функция е интерполационният полином на Лагранж, ($\varphi(x) = L_n(x)$), построена по тази таблица, т.е.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x). \tag{2}$$

Тук $l_i(x)$ са функциите на Лагранж, независещи от $f(x)$.

Като включим и грешката на приближението $R_n(x)$, имаме:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x), \tag{3}$$

$$R_n(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|, \quad M_{n+1}(x) = \max_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|. \tag{4}$$

Интегрираме двете страни на (2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[L_n(x) + R_n(x)\right]dx = \int_a^b L_n(x)dx + \int_a^b R_n(x)\,dx.$$

Ако грешката $R_n(x)$ е малка, то и интеграл от грешката $r_n = \int_a^b R_n(x)dx$ ще бъде малка. Тогава приемаме, че интегралът е приближено равен на интеграл от $L_n$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)dx.$$

Сега да заместим $L_n$ от (1):

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)\right]dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b l_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i \qquad (5)$$

Получихме, че интегралът е една сума:

$$\boxed{I \approx \sum_{i=0}^{n} y_i A_i}, \qquad (6)$$

която се нарича ***квадратурна формула*.** Може да бъде получена и независимо от използването на $L_n$. Важно е грешката *r* да е малка.

## 2. Формули на Нютон-Коутс за числено интегриране

Когато полиномът на Лагранж се използва с равноотдалечени възли, то квадратурните формули се наричат формули на Нютон-Коутс.

### *2.1. Частен случай n=0: формули на правоъгълниците*

Имаме само 1 възел:

| |
|---|
| $x_0$ |
| $y_0$ |

Записваме интерполационния полином $L_0 = y_0$.

Тук грешката на приближението е $\left|R_0(x)\right| \le M_1 \left|x - x_0\right|$, където $M_1 = \max\limits_{[a,b]} \left|f\,'(\xi)\right|$. Интегрираме в някакъв интервал, напр. $[x_0, x_1]$:

$I=\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} L_0 dx+\int\limits_{x_0}^{x_1} R_0 dx$. Или $I\approx\int\limits_{x_0}^{x_1} L_0 dx=\int\limits_{x_0}^{x_1} y_0 dx=y_0\int\limits_{x_0}^{x_1} dx=y_0(x_1-x_0)=y_0.h$.

Означаваме $h=x_1-x_0$. Така получаваме формулата на левия правоъгълник: $\boxed{I\approx y_0.h}$, (7)

с грешка от численото интегриране: $r_{0,ляв}=\int\limits_{x_0}^{x_1} R_0 dx$. Оценяваме я:

$$|r_0|\le\left|\int\limits_{x_0}^{x_1} R_0 dx\right|\le M_1\left|\int\limits_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx\right|=M_1\left.\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right|_{x_0}^{x_1}=M_1\frac{h^2}{2!}=O(h^2). \qquad (8)$$

Този тип формули се наричат от отворен тип, защото интервалът не е фиксиран. Напр. ако интерполираме в т. $x_1$ и интегрираме в $[x_0,x_1]$ формулата се нарича формула на десния правоъгълник и ще има вида $I\approx y_1.h$, със същата оценка на грешката. Реално можем да интерполираме в която и да е точка от $[x_0,x_1]$ и получената формула ще има същата грешка и подобен вид.

## Сумарна формула на правоъгълниците:

Получава се, като разделим интервала $[a,b]$ на <u>$n$ подинтервала</u> с равни дължини, озн. с $h$, и приложим някоя от току-що изведените формули на правоъгълника във всеки подинтервал. Нека възлите са изчислени по формулата

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,\dots,n, \quad h = \frac{b-a}{n}. \tag{9}$$

Имаме: $$I \approx \int_a^b = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} = y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i. \tag{10}$$

Грешката не надминава сумата от грешките, т.е. от (8)

$$\left| r_{0,обща} \right| \le n M_1 \frac{h^2}{2} = M_1 h \frac{(b-a)}{2} = O(h), \tag{11}$$

тъй като $n.h = b - a$.

<u>Пример.</u> Да се пресметне по формулата на десните

правоъгълници $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x} dx$ за $n$=10.

<u>Решение.</u> Тук $[a,b]=[2,\ 3]$, $n$=10, $h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{10}=\frac{1}{10}=0.1$.

Съгласно формула (10) трябва да изчислим сумата

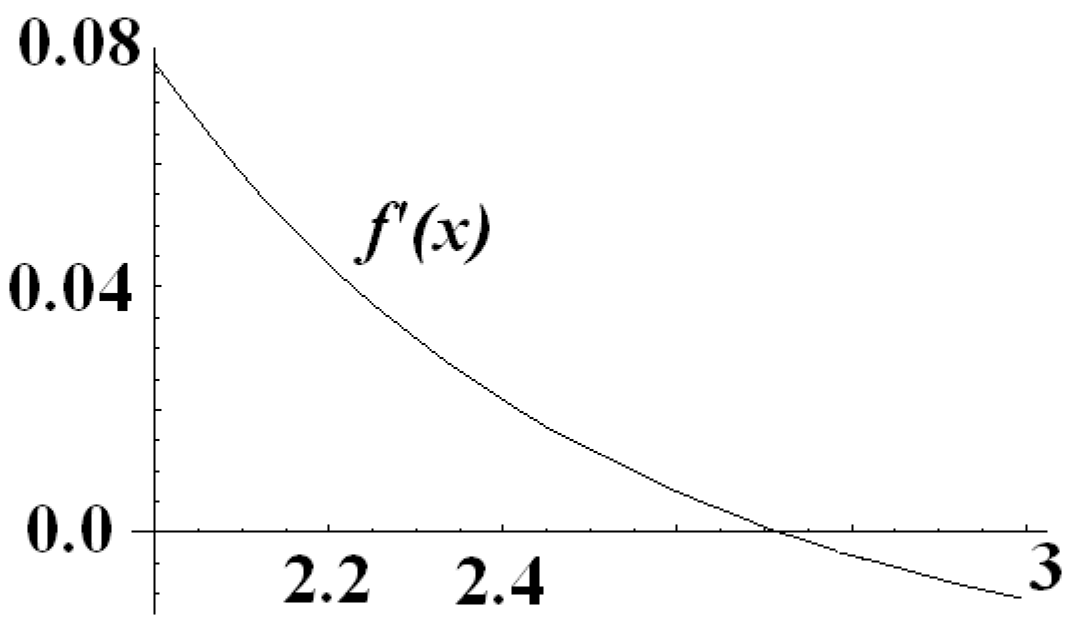
$$I \approx \int_a^b \ = y_0 h + y_1 h + \ldots + y_{n-1} h = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \ .$$

В нашия случай таблицата за интегриране при е:

$x$= {2., 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.}

y= {0.346574, 0.353303, 0.35839, 0.362134, 0.364779, 0.366516, 0.367504, 0.367871, 0.367721, 0.367142, 0.366204}.

Събираме всички $y_i$, $i=0,1,\ldots,9$ (без последното!) и заместваме в сумата: $I \approx h\sum_{i=0}^{n-1} y_i = 0.1(3.62193) = 0.362193$. Но не всички цифри тук са верни. Трябва да се направи оценка на грешката по формула (11). Търсим $M_1 = \max_{[2,3]} |f\,'(\xi)|$. За $f = \dfrac{\ln(x)}{x}$ изчисляваме $f\,' = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. Вместо да търсим максимум на тази функция, начертаваме графиката й:




Виждаме, че по абс. стойност $|f\,'| \le 0.08$, следователно:

$$|r_{обща}| \le M_1 h \frac{(b-a)}{2} = (0.08)\frac{1}{2}(0.1) = 0.004.$$

Следователно не повече от 3 знака ще останат, закръгляме:

Отговор с правоъгълн.: $I \approx 0.362$.

## 2.2. Частен случай n=1: формула на трапците

Сега имаме 2 възела:

| | |
|---|---|
| $x_0$ | $x_1$ |
| $y_0$ | $y_1$ |

$h = x_1 - x_0$. Интерполационният полином е $L_1(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$

или $\boxed{L_1(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)}{-h} + y_1 \dfrac{(x - x_0)}{h}}$.

Тук грешката на приближението е $R_1(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$, с оценка $\boxed{|R_1(x)| \le \dfrac{M_2}{2!}|(x - x_0)(x - x_1)|}$, където $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(\xi)|$.

Представянето на функцията е: $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$.

Интегрираме това равенство в $[x_0, x_1]$: $\boxed{I = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} L_1 dx + \int\limits_{x_0}^{x_1} R_1 dx}$.

Приближението за интеграла е интеграл от интерп. полином:

$$I \approx \int_{x_0}^{x_1} L_1(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (y_0 \frac{(x-x_1)}{-h} + y_1 \frac{(x-x_0)}{h})dx = \int_{x_0}^{x_1} (y_0 \frac{(x-x_1)}{-h})dx + \int_{x_0}^{x_1} (y_1 \frac{(x-x_0)}{h})dx =$$

$$\frac{y_0}{-h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)dx + \frac{y_1}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx = -\frac{y_0}{h}\frac{(x-x_1)^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \frac{y_1}{h}\frac{(x-x_0)^2}{2}\Bigg|_{x_0}^{x_1} =$$

$$\frac{y_0}{h}\frac{(x_0-x_1)^2}{2} + \frac{y_1}{h}\frac{(x_0-x_1)^2}{2} = \frac{y_0}{h}\frac{h^2}{2} + \frac{y_1}{h}\frac{h^2}{2} = h\frac{y_0+y_1}{2}.$$

Така получихме формулата на трапеца:

$$I \approx h\frac{y_0+y_1}{2}, \quad y_0, y_1 \text{ и височина } h \qquad (12)$$

която геометрично вместо точния интеграл пресмята лицето на трапеца с основи

Грешката от численото интегриране с тази формула е интеграл от грешката на приближението:

$r_1 = \int_{x_0}^{x_1} R_1(x)dx$. Оценяваме я:

$$|r_1| \le \left|\int_{x_0}^{x_1} R_1 dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x_1} \frac{M_2}{2}(x-x_0)(x-x_1)dx\right| \le \frac{M_2}{2}\left|\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)dx\right| =$$

$$\frac{M_2}{2}\left|\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^2 - h(x-x_0)dx\right| = \ldots = M_2\frac{h^3}{12} = O(h^3). \qquad (13)$$

## Сумарна формула на трапците:

Получава се, като разделим интервала $[a,b]$ на <u>*n* подинтервала</u> с равни дължини, озн. с $h$, и приложим формула (12) във всеки подинтервал. Нека възлите са изчислени по формулата (9)

$x_i = a + ih, \;\; i = 0,1,\ldots,n$, където стъпката е $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Имаме:

$$I \approx \int_a^b = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} = h\frac{y_0 + y_1}{2} + h\frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$, или

$$\boxed{I \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n\right)}. \qquad (14)$$

Грешката не надминава сумата от грешките, т.е. от (13)

$$\boxed{\left|r_{1обща}\right| \le n.M_2\frac{h^3}{12} = M_2\frac{(b-a)}{12}h^2 = O(h^2)}, \qquad (15)$$

тъй като $n.h = b - a$.

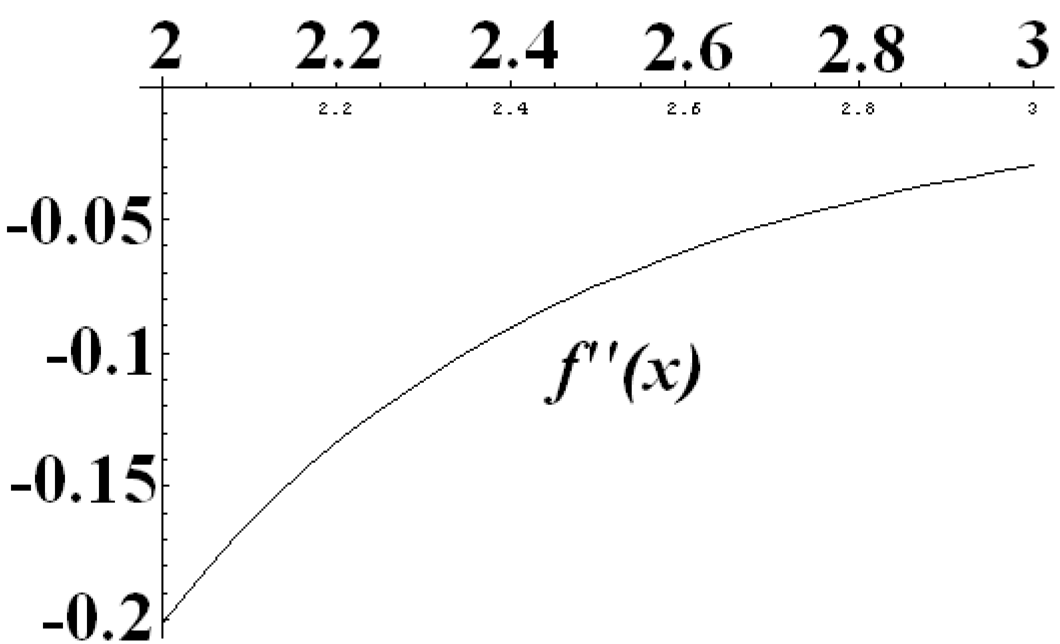
<u>Пример.</u> Да се пресметне по формулата на трапеците същия интеграл $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}dx$ за $n$=10.

<u>Решение.</u> Интервалът е $[a,b] = [2,\ 3]$, $n$=10, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$.

Съгласно формула (14) трябва да изчислим сумата от значенията на функцията във вътрешните точки, която се умножава по 2, да добавим стойностите от краищата и цялото да умножим по $h/2$.

$$I \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n) = \frac{0.1}{2}(0.346574+2.3.27536+0.366204) = \frac{0.1}{2}7.2635=0.363175.$$

Оценяваме грешката по формула (15). Търсим $M_2 = \max\limits_{[2,3]}|f''(\xi)|$. За




$f = \dfrac{\ln(x)}{x}$ изчисляваме $f' = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ и $f'' = \dfrac{-3+2\ln(x)}{x^3}$.

Вместо да търсим максимум на $f''$, начертаваме графиката й:

Виждаме, че по абс. стойност $|f''| \le 0.2$, следователно:

$$\left| r_{1} M_{обща} \right| \le n.\, M_2 \frac{h^3}{12} = M_2 \frac{(b-a)}{12} h^2 = 0.2\frac{1}{12}(0.1)^2 = \frac{0.002}{12} \approx 0.0002$$

Следователно не повече от 4 знака ще останат, закръгляме:

Отговор с метода на трапеците: $I \approx 0.3632$.

## 2.3. Частен случай n=2: формула на Симпсън

Вече имаме 3 възела:

| | | |
|---|---|---|
| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ |

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Интерполационният полином е

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$ или

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{h^2} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{-h^2} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2}.$$

Тук грешката на приближението е $R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$, с оценка $\boxed{|R_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|}$, където $M_3 = \max_{[a,b]} |f'''(\xi)|$.

Аналогично представянето на функцията е: $f(x) = L_2(x) + R_2(x)$.

Интегрираме това равенство в $[x_0, x_2]$: $\boxed{I = \int_{x_0}^{x_2} f(x) = \int_{x_0}^{x_2} L_2 dx + \int_{x_0}^{x_2} R_2 dx}$.

Приближението за интеграла е интеграл от интерп. полином:

$$I \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx.$$

Аналогично на предните два случая като се интегрира в интервала $[x_0, x_2]$ с дължина $2h$, след доста сметки се получава формулата на Симпсън:

$$\boxed{I \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x) dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)}. \qquad (16)$$

Грешката от численото интегриране с тази формула е интеграл от грешката на приближението

$r_2 = \int\limits_{x_0}^{x_2} R_2(x)dx$. След интегрирането се получава следната оценка:

$$\boxed{|r_2| \le M_4 \left| -\frac{h^5}{90} \right| = M_4 \frac{h^5}{90} = O(h^5)}, \qquad (17)$$

където $M_4 = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{(IV)}(\xi) \right|$. Тук се получава по-фина оценка, поради факта, че се използва симетрия относно средната точка $x_1$.

## Сумарна формула на Симпсън:

Отново делим интервала $[a,b]$ на <u>$n$ подинтервала</u> с равни дължини, озн. с $h$, но вече задължително имаме четен брой подинтервали $n = 2m$. Възлите са изчислени пак по формула (9)

$x_i = a + ih, \;\; i = 0,1,\ldots,n$, където стъпката е $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Като приложим формула (16) във всеки подинтервал имаме

$$I \approx \int_a^b \; = \int_{x_0}^{x_1} \; + \int_{x_1}^{x_2} \; + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \; =$$

$$\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \ldots + \frac{h}{3}\left(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right) =$$

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + y_{2m}) \qquad ,$$

$$\boxed{I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + y_{2m})}. \qquad (18)$$

Грешката не надминава сумата от грешките, т.е. от (17)

$$\boxed{\left|r_{1обща}\right| \le m.M_4 \frac{h^5}{90} = M_4 \frac{(b-a)}{180} h^4 = O(h^4)}, \qquad (19)$$

тъй като $m.h = (b-a)/2$ .

Пример. Да се пресметне по формулата на Симпсън същия интеграл $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}dx$ за $n$=10 и да се оцени грешката.

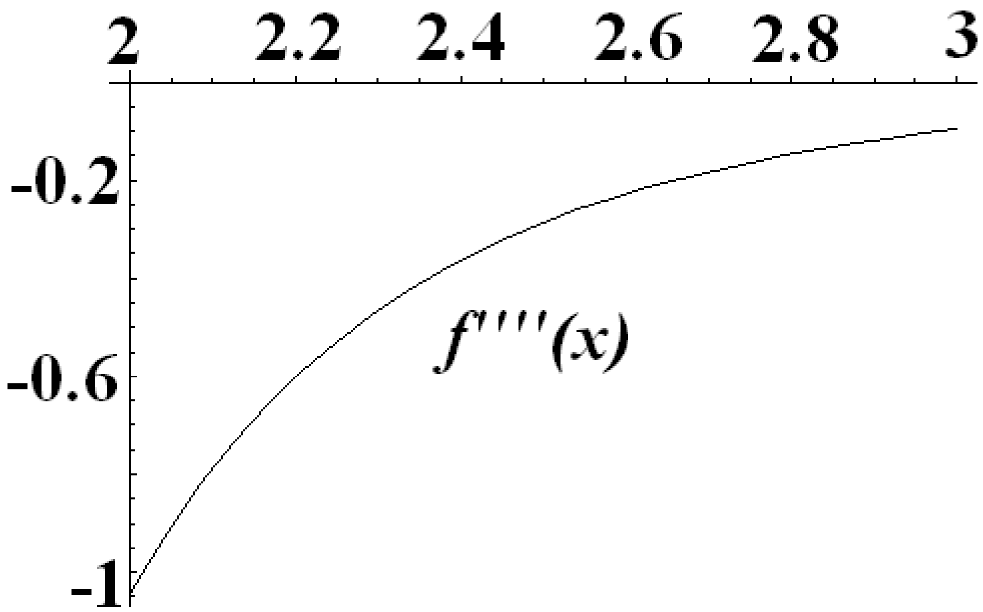
Решение. Интервалът е $[a,b]=[2,\ 3]$, $n$=10, $m$=5, $h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-2}{10}=\frac{1}{10}=0.1$.

Съгласно формула (18) трябва да изчислим две суми, като се внимава за различния брой събираеми!

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} + y_{2m}) = \frac{0.1}{3}(0.346574+4.1.81697+2.1.45839+0.366204) =$$

$$\frac{0.1}{3}10.8974 = 0.363248.$$

Оценяваме грешката по формула (19). Търсим $M_4 = \max_{[2,3]}\left|f''''(\xi)\right|$. Тя е $f'''' = \frac{-50+25\ln(x)}{x^5}$. Вместо да търсим максимума на тази функция, отново начертаваме графиката ѝ.




Виждаме, че по абс. стойност $\left|f''''\right| \le 1$, следователно:

$$\left|r_{1обща}\right| \le M_4 \frac{h^5}{90} = 1\frac{1}{180}(0.1)^4 = \frac{0.0001}{180} = 0.000006$$

Следователно до 5-ти знак закръгляме:

Отговор с метода на Симпсън: $I \approx 0.36325$.